Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

20 Решите уравнение $x^4=\left(4x-5\right)^2$.

Решение.
Исходное уравнение приводится к виду
$$\left(x^2-4x+5\right)\left(x^2+4x-5\right)=0.$$
Уравнение $x^2-4x+5=0$ не имеет корней.
Уравнение $x^2+4x-5=0$ имеет корни -5 и 1.
Ответ: -5; 1.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение доведено до конца, но допущена арифметическая ошибка, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

21 Имеются два сосуда, содержащие 48 кг и 42 кг раствора кислоты различной концентрации. Если их слить вместе, то получится раствор, содержащий 42 % кислоты. Если же слить равные массы этих растворов, то полученный раствор будет содержать 40 % кислоты. Сколько процентов кислоты содержится во втором растворе?

Решение.
Пусть концентрация кислоты в первом сосуде равна c_1 %, а во втором — c_2 %.
Получаем систему уравнений:
$$\begin{cases}\dfrac{48\cdot\dfrac{c_1}{100}+42\cdot\dfrac{c_2}{100}}{90}=0{,}42,\\ \dfrac{c_1+c_2}{2}=40;\end{cases}\quad \begin{cases}48c_1+42c_2=3780,\\ c_1+c_2=80,\end{cases}$$
откуда находим $c_1=70$, $c_2=10$.
Ответ: 10.

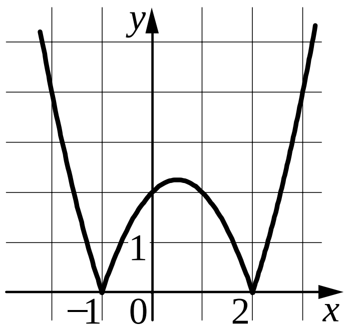
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Ход решения верный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка вычислительного характера	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

22 Постройте график функции

$$y=\left|x^2-x-2\right|.$$

Какое наибольшее число общих точек может иметь график данной функции с прямой, параллельной оси абсцисс?

Решение.



При $x<-1$ и $x>2$ функция $y=\left|x^2-x-2\right|$ принимает вид $y=x^2-x-2$; её график — часть параболы с вершиной $(0,5;\,-2,25)$ и направленными вверх ветвями, ограниченная точками $(-1;0)$ и $(2;0)$. При $-1\le x\le 2$ функция $y=\left|x^2-x-2\right|$ принимает вид $y=-x^2+x+2$ её график — часть параболы с вершиной $(0,5;\,2,25)$ и направленными вниз ветвями, ограниченная точками $(-1;0)$ и $(2;0)$.

Прямая $y=a$ имеет с графиком функции $y=\left|x^2-x-2\right|$:

0 общих точек при $a<0$;

2 общих точки при $a=0$ или $a>2,25$;

3 общих точки при $a=2,25$;

4 общих точки при $0<a<2,25$.

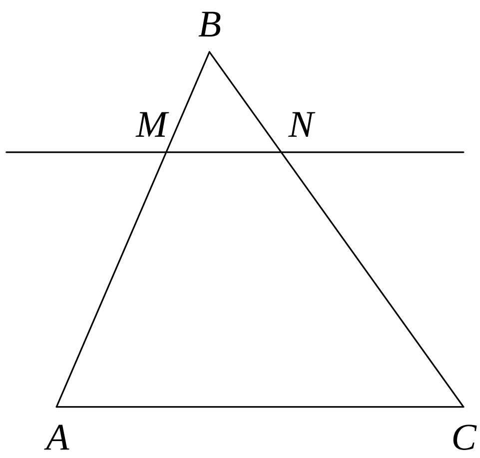
Получили, что наибольшее количество точек пересечения 4.

Ответ: 4.

Содержание критерия	Баллы
График построен верно, верно найдено искомое количество точек	2
График построен верно, но искомое количество точек найдено неверно или не найдено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

23 Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно. Найдите BN, если $MN = 22$, $AC = 55$, $NC = 36$.

Решение.



Поскольку прямая MN параллельна прямой AC, углы BNM и BCA равны как соответственные при параллельных прямых AC и MN и секущей BC. Следовательно, треугольники ABC и MBN подобны по двум углам, откуда получаем: $\frac{BC}{BN} = \frac{AC}{MN}$.

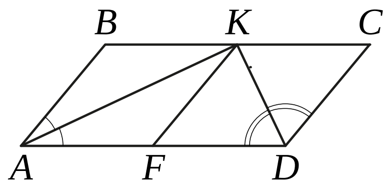
$$\frac{AC}{MN} = \frac{55}{22} = 2{,}5, \text{ а } \frac{BC}{BN} = \frac{BN + NC}{BN} = 1 + \frac{36}{BN}, \text{ получаем: } BN = \frac{36}{1{,}5} = 24.$$

Ответ: 24.

Содержание критерия	Баллы
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ	2
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

24 Биссектрисы углов A и D параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке K, лежащей на стороне BC. Докажите, что K — середина стороны BC.

Доказательство.



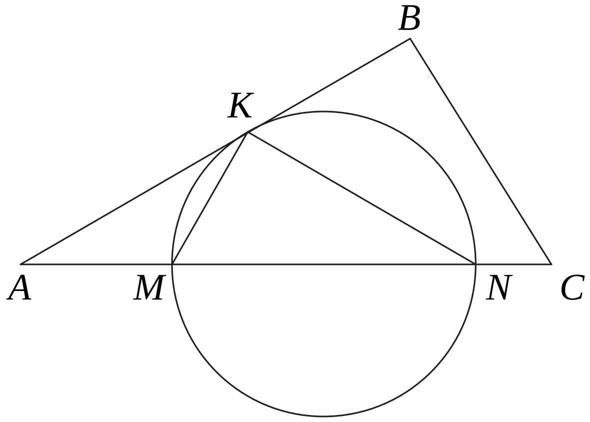
Проведём прямую KF параллельно стороне AB (см. рисунок). Тогда в каждом из параллелограммов $ABKF$ и $CDFK$ диагональ делит угол пополам, поэтому эти параллелограммы являются ромбами. Значит, $BK = KF = KC$. Следовательно, точка K — середина стороны BC.

Содержание критерия	Баллы
Доказательство верное, все шаги обоснованы	2
Доказательство в целом верное, но содержит неточности	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

25 Точки M и N лежат на стороне AC треугольника ABC на расстояниях соответственно 4 и 15 от вершины A. Найдите радиус окружности, проходящей через точки M и N и касающейся луча AB, если $\cos\angle BAC = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

Решение.

Пусть K — точка касания окружности с лучом AB (см. рисунок). По теореме о касательной и секущей $AK^2 = AM \cdot AN$, откуда $AK = \sqrt{4 \cdot 15} = 2\sqrt{15}$.



В треугольнике AKM по теореме косинусов:

$$KM^2 = AM^2 + AK^2 - 2AM \cdot AK \cos\angle BAC = 16 + 60 - 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{60} \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = 16.$$

Значит, $KM = 4$.

Получили, что в треугольнике AKM стороны AM и KM равны, следовательно, треугольник AKM равнобедренный, поэтому $\angle AKM = \angle KAM = \angle BAC$.

По теореме об угле между касательной и хордой $\angle KNM = \angle AKM$.

Пусть R — радиус окружности, проходящей через точки M, N и K. По теореме синусов

$$R = \frac{KM}{2\sin\angle KNM} = \frac{4}{2\sqrt{1 - \frac{15}{16}}} = 8.$$

Ответ: 8.

Содержание критерия	**Баллы**
Ход решения задачи верный, получен верный ответ	2
Ход решения верный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка вычислительного характера	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

20

Решите уравнение $x^4=(3x-10)^2$.

Решение.
Исходное уравнение приводится к виду

$$\left(x^2-3x+10\right)\left(x^2+3x-10\right)=0.$$

Уравнение $x^2-3x+10=0$ не имеет корней.
Уравнение $x^2+3x-10=0$ имеет корни -5 и 2.
Ответ: -5; 2.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение доведено до конца, но допущена арифметическая ошибка, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

21

Имеются два сосуда, содержащие 24 кг и 26 кг раствора кислоты различной концентрации. Если их слить вместе, то получится раствор, содержащий 39 % кислоты. Если же слить равные массы этих растворов, то полученный раствор будет содержать 40 % кислоты. Сколько процентов кислоты содержится во втором растворе?

Решение.
Пусть концентрация кислоты в первом сосуде равна c_1 %, а во втором — c_2 %.
Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{24\cdot\dfrac{c_1}{100}+26\cdot\dfrac{c_2}{100}}{50}=0{,}39,\\ \dfrac{c_1+c_2}{2}=40;\end{cases}\qquad \begin{cases}24c_1+26c_2=1950,\\ c_1+c_2=80,\end{cases}$$

откуда находим $c_1=65$, $c_2=15$.
Ответ: 15.

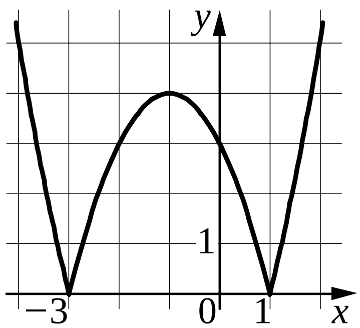
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Ход решения верный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка вычислительного характера	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

22 Постройте график функции

$$y=\left|x^2+2x-3\right|.$$

Какое наибольшее число общих точек может иметь график данной функции с прямой, параллельной оси абсцисс?

Решение.



При $x<-3$ и $x>1$ функция $y=\left|x^2+2x-3\right|$ принимает вид $y=x^2+2x-3$; её график — часть параболы с вершиной $(-1;-4)$ и направленными вверх ветвями, ограниченная точками $(-3;0)$ и $(1;0)$. При $-3\le x\le 1$ функция $y=\left|x^2+2x-3\right|$ принимает вид $y=-x^2-2x+3$ её график — часть параболы с вершиной $(-1;4)$ и направленными вниз ветвями, ограниченная точками $(-3;0)$ и $(1;0)$.

Прямая $y=a$ имеет с графиком функции $y=\left|x^2+2x-3\right|$:

0 общих точек при $a<0$;
2 общих точки при $a=0$ или $a>4$;
3 общих точки при $a=4$;
4 общих точки при $0<a<4$.

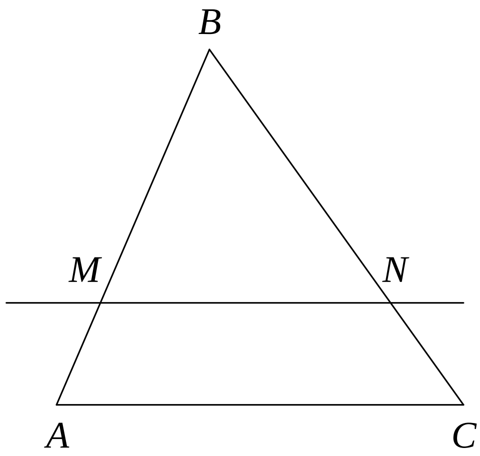
Получили, что наибольшее количество точек пересечения 4.

Ответ: 4.

Содержание критерия	Баллы
График построен верно, верно найдено искомое количество точек	2
График построен верно, но искомое количество точек найдено неверно или не найдено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

23 Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно. Найдите BN, если $MN = 16$, $AC = 20$, $NC = 15$.

Решение.



Поскольку прямая MN параллельна прямой AC, углы BNM и BCA равны как соответственные при параллельных прямых AC и MN и секущей BC. Следовательно, треугольники ABC и MBN подобны по двум углам, откуда получаем: $\frac{BC}{BN} = \frac{AC}{MN}$.

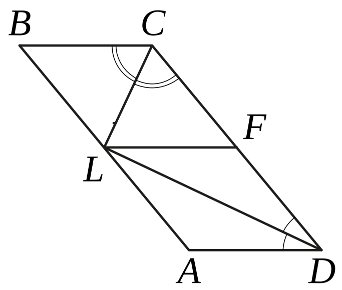
$$\frac{AC}{MN} = \frac{20}{16} = 1{,}25, \text{ а } \frac{BC}{BN} = \frac{BN + NC}{BN} = 1 + \frac{15}{BN}, \text{ получаем: } BN = \frac{15}{0{,}25} = 60.$$

Ответ: 60.

Содержание критерия	Баллы
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ	2
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

24 Биссектрисы углов C и D параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке L, лежащей на стороне AB. Докажите, что L — середина стороны AB.

Доказательство.



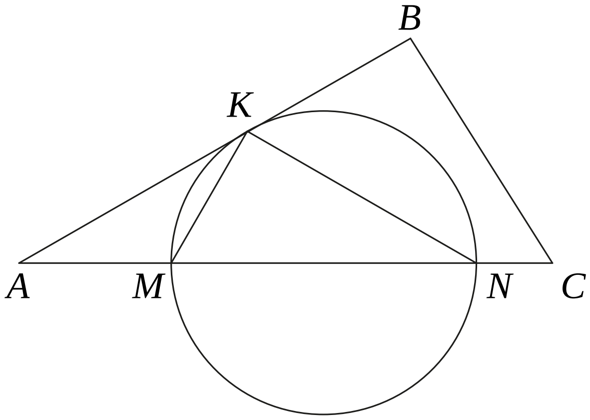
Проведём прямую LF параллельно стороне AD (см. рисунок). Тогда в каждом из параллелограммов $ALFD$ и $BCFL$ диагональ делит угол пополам, поэтому эти параллелограммы являются ромбами. Значит, $AL = LF = LB$. Следовательно, точка L — середина стороны AB.

Содержание критерия	Баллы
Доказательство верное, все шаги обоснованы	2
Доказательство в целом верное, но содержит неточности	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

25 Точки M и N лежат на стороне AC треугольника ABC на расстояниях соответственно 9 и 11 от вершины A. Найдите радиус окружности, проходящей через точки M и N и касающейся луча AB, если $\cos\angle BAC = \frac{\sqrt{11}}{6}$.

Решение.

Пусть K — точка касания окружности с лучом AB (см. рисунок). По теореме о касательной и секущей $AK^2 = AM \cdot AN$, откуда $AK = \sqrt{9 \cdot 11} = 3\sqrt{11}$.



В треугольнике AKM по теореме косинусов:

$$KM^2 = AM^2 + AK^2 - 2AM \cdot AK \cos\angle BAC = 81 + 99 - 2 \cdot 9 \cdot \sqrt{99} \cdot \frac{\sqrt{11}}{6} = 81.$$

Значит, $KM = 9$.

Получили, что в треугольнике AKM стороны AM и KM равны, следовательно, треугольник AKM равнобедренный, поэтому $\angle AKM = \angle KAM = \angle BAC$.

По теореме об угле между касательной и хордой $\angle KNM = \angle AKM$.

Пусть R — радиус окружности, проходящей через точки M, N и K. По теореме синусов

$$R = \frac{KM}{2\sin\angle KNM} = \frac{9}{2\sqrt{1 - \frac{11}{36}}} = 5{,}4.$$

Ответ: 5,4.

Содержание критерия	**Баллы**
Ход решения задачи верный, получен верный ответ	2
Ход решения верный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка вычислительного характера	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*